Kom ihåg:

diagonalisering

$$A \rightsquigarrow D$$

dec 7-13:02

Genom en bas av egenvektorer får vi ett basbyte med matris P så att

$$P^{-1}AP = D$$

diagonalmatris.

dec 7-13:03

Det går inte alltid.

Men om det finns n st olika egen-värden så går det.

dec 7-13:03

Spektralsatsen.

Om A är symmetrisk dvs

$$A^t = A$$

då finns en ortogonal bas

dec 7-13:03

av egenvektorer.

Alltså kan vi

välja P som

en ortogonal matris.

Då är $P^{-1} = P^t$

och $D = P^t A P$

dec 7-13:03

Vi hade exempel

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Då blev

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dec 7-13:03

och

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

dec 7-13:12

Kvadratiska former

Jämför med

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

dec 7-13:13

f innehåller

- kvadratisk term
- linjär term
- konstant term

dec 7-13:14

I flera variabler finns flera möjliga kvadratiska termer:

ex x, y

x^2, xy, y^2

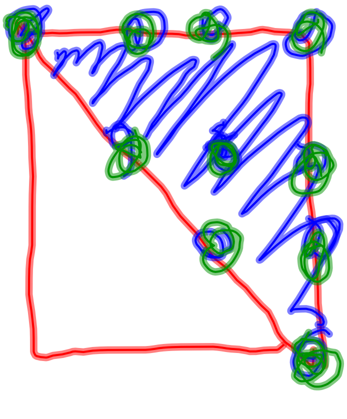
dec 7-13:16

ex: x, y, z

$x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2$

$\overline{1, 3, 6, 10} \; \overline{15, 21}$

triangeltal



dec 7-13:16

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

dec 7-13:20

Vi kan skriva

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1, i=1}^{n, n} a_{ij} x_i x_j$$

dec 7-13:22

Eftersom

$$xy = yx$$

kan vi lika gärna tänka att

A är symmetrisk

dec 7-13:24

Testa att

$$x^2+xy+y^2=(x\ y)\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}=\left(x+\frac{1}{2}y\ \ \frac{1}{2}x+y\right)$$

$$\left(x+\frac{1}{2}y\ \ \frac{1}{2}x+y\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=$$

dec 7-13:25

$$= x\left(x+\frac{1}{2}y\right)+y\left(\frac{1}{2}x+y\right)$$

$$= x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yx+y^2$$

$$= x^2+xy+y^2$$

dec 7-13:26

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= ax^2 + bxy + byx + cy^2$$

dec 7-13:27

$= ax^2 + 2bxy + cy^2$

Fråga: Vilken matris ger

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Svar: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

dec 7-13:29

Nivåkurvor:

Kurvorna

$$Q(x,y)=k$$

där k är konstant

kalla nivåkurvor

dec 7-13:32

Ex $Q(x,y) = xy$

$xy = k \iff$

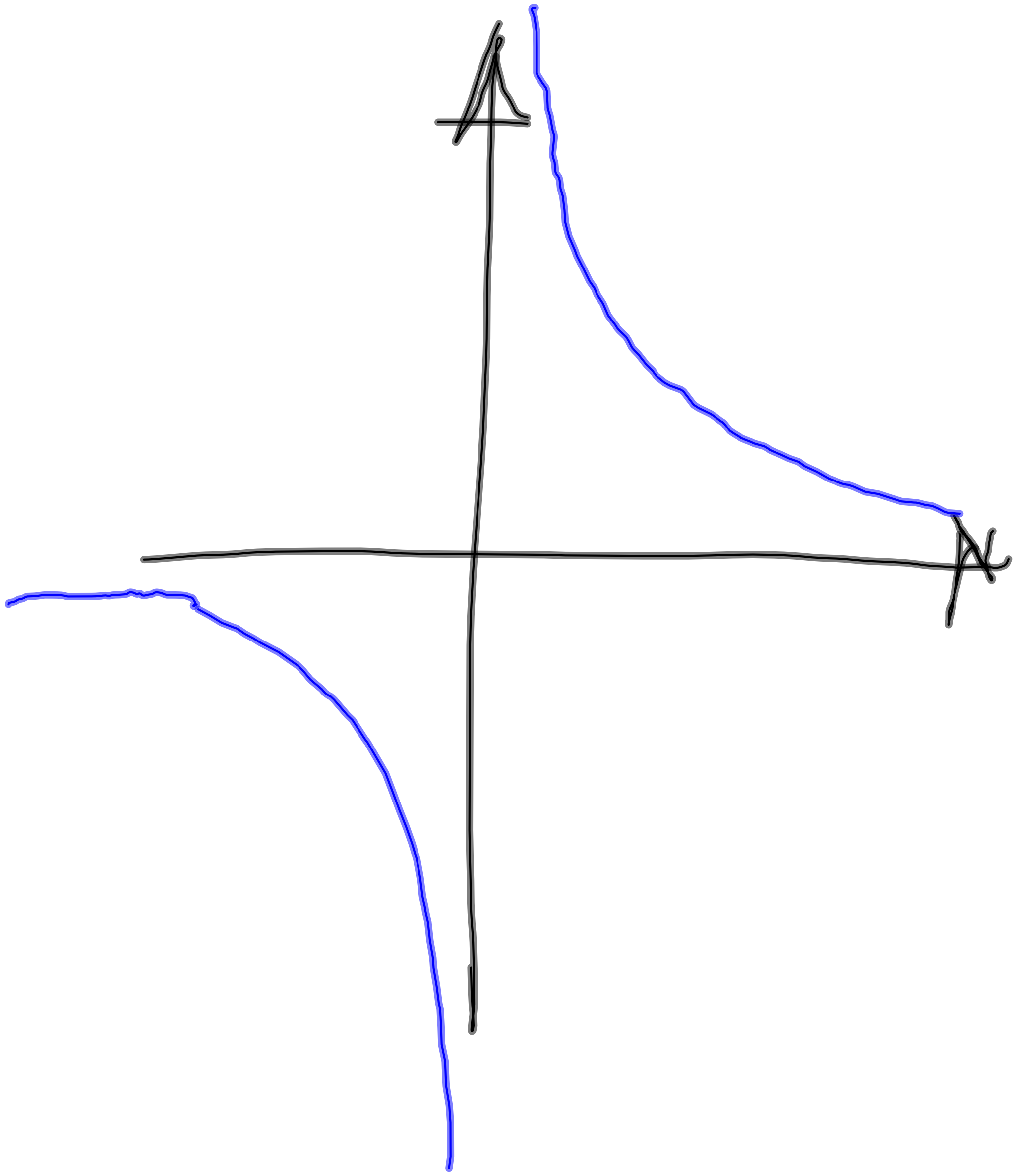
$y = k/x$

för positivt k

får vi

dec 7-13:33

nivåkurva

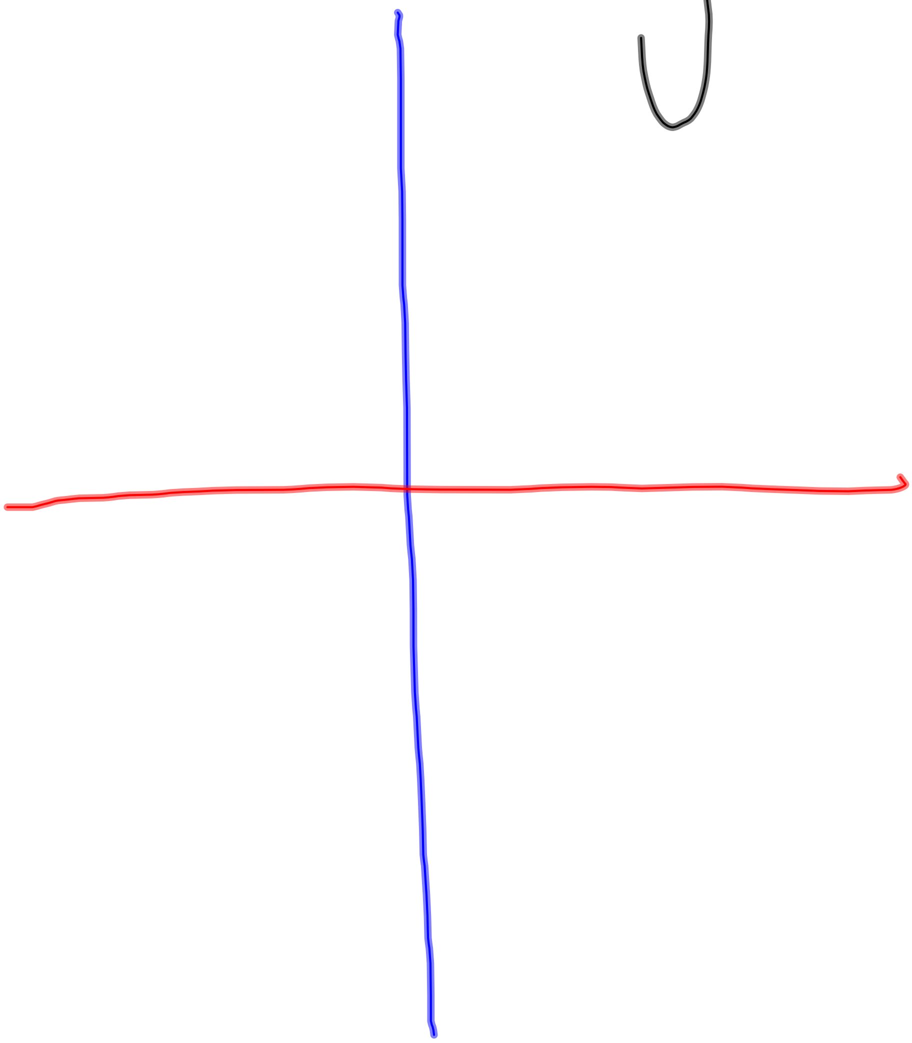


dec 7-13:35

$k=0$

$xy=0$

$x=0$ eller $y=0$



dec 7-13:36

Dessa kallas

hyperbler

dec 7-13:39

Den andra

motsvarar

$Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$

dec 7-13:40

För att se hur nivåkurvorna ser ut kan vi diagonalisera

$$Q(x,y) = (x\ y)\, D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dec 7-13:41

Ex: $Q(x,y) = xy$

Vilken matris?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

dec 7-13:42

Egenvärden:

$\pm\frac{1}{2}$

egenvektorer

$(1,1)^t$ och $(1,-1)$

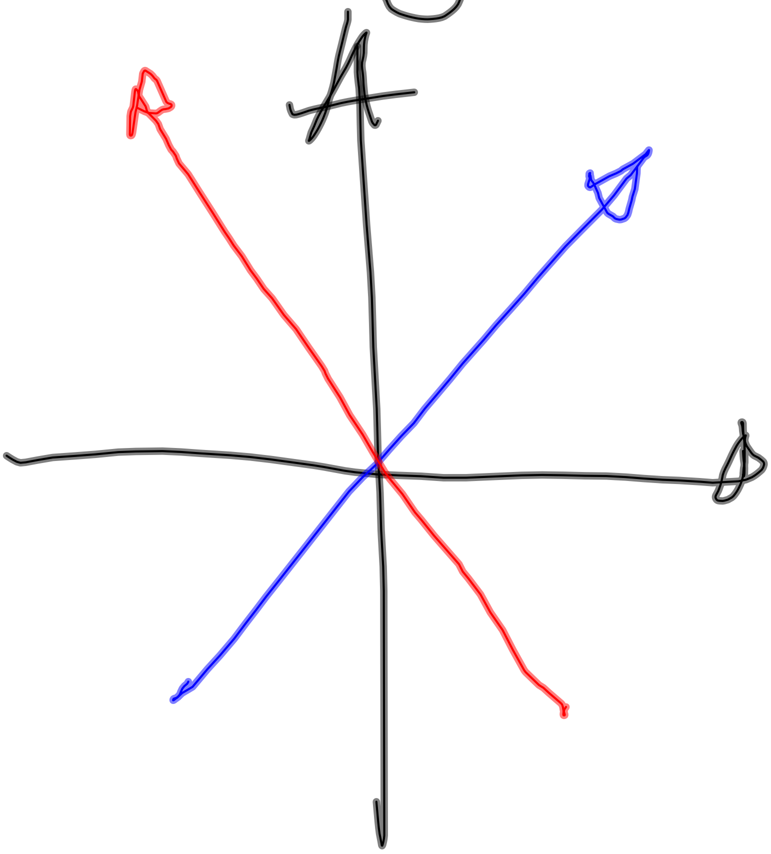
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dec 7-13:43

ger P

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Om vi byter koord.



dec 7-13:45

I de nya koordinaterna

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

dec 7-13:46

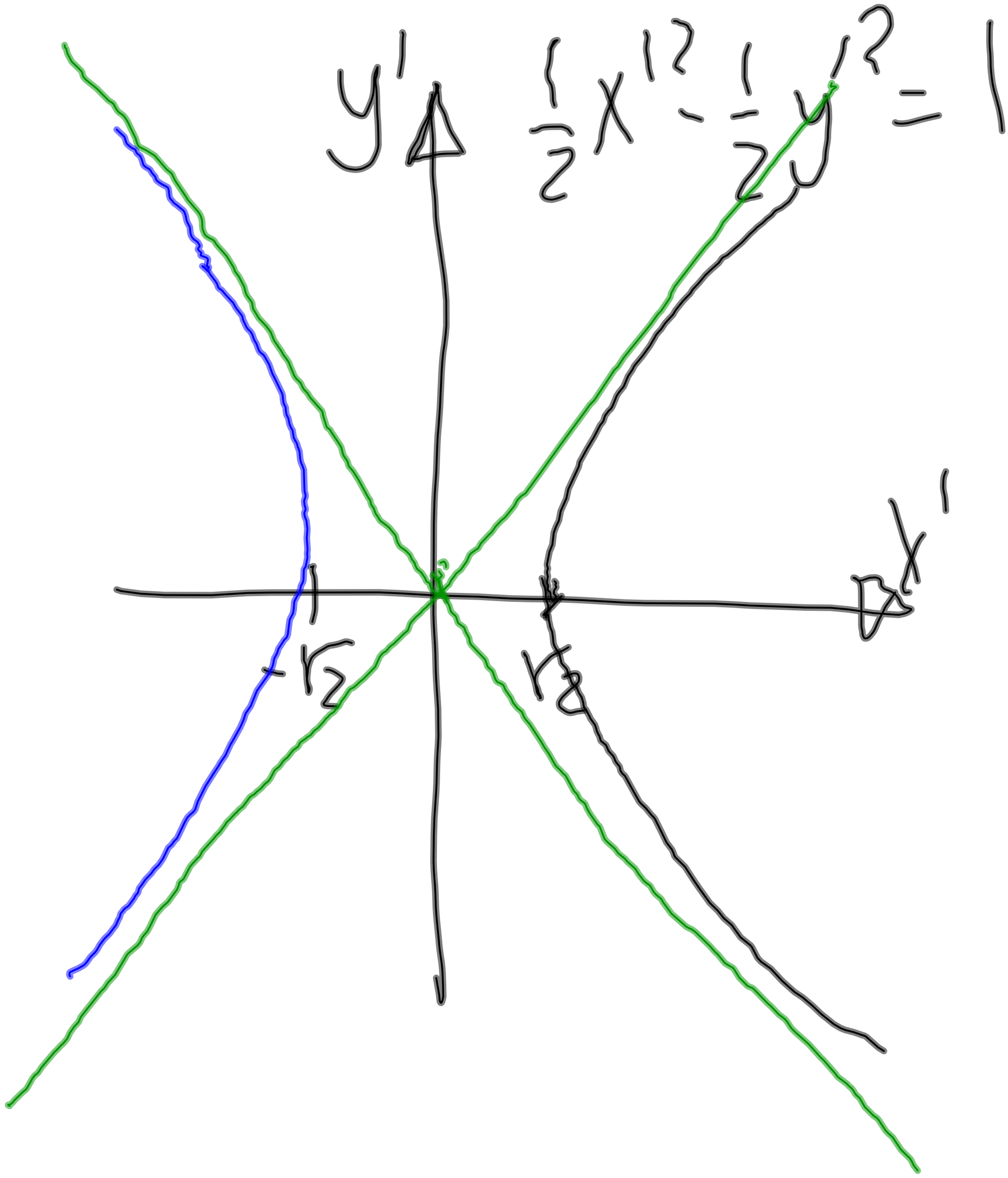
Ser ekvationerne ut

$$Q(x,y) = xy = k$$

$$Q(x',y') =$$

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2$$

dec 7-13:47



dec 7-14:05

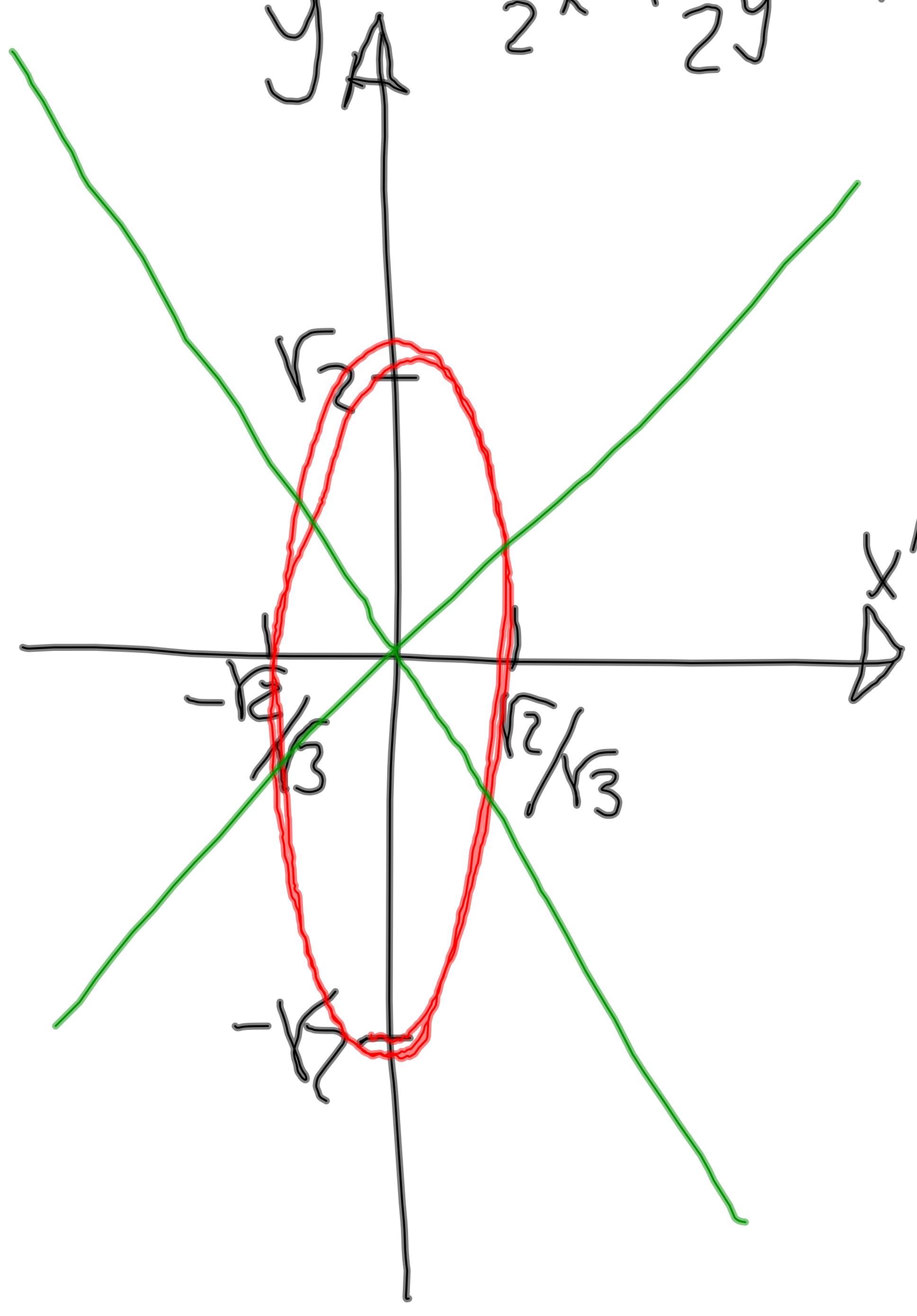
För $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$ får vi egenvärden $\frac{3}{2}$ och $\frac{1}{2}$

och

$$Q(x',y') = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2$$

dec 7-14:08

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1$$



dec 7-14:09

Vi har att

x^2+xy+y^2 är

positivt definit.

(Egentligen lös

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = 0$$

dec 7-14:13

Uppgift 2.43

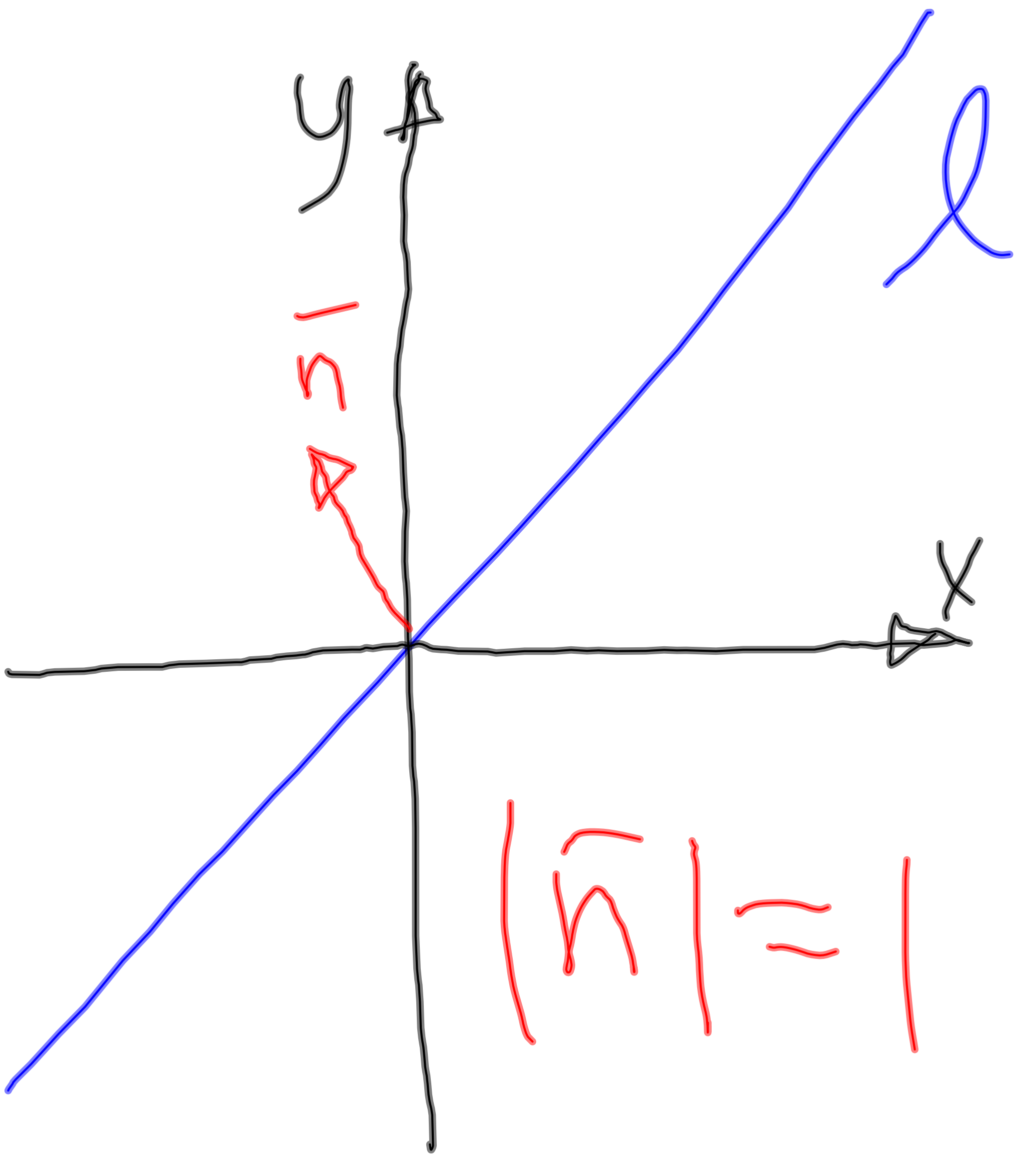
Visa att matrisen för en spegling i en linje i planet ges av

dec 7-14:17

$$I - 2\bar{n}\bar{n}^t$$

där $\bar{n}$ är en normerad normalvektor till linjen.

dec 7-14:20



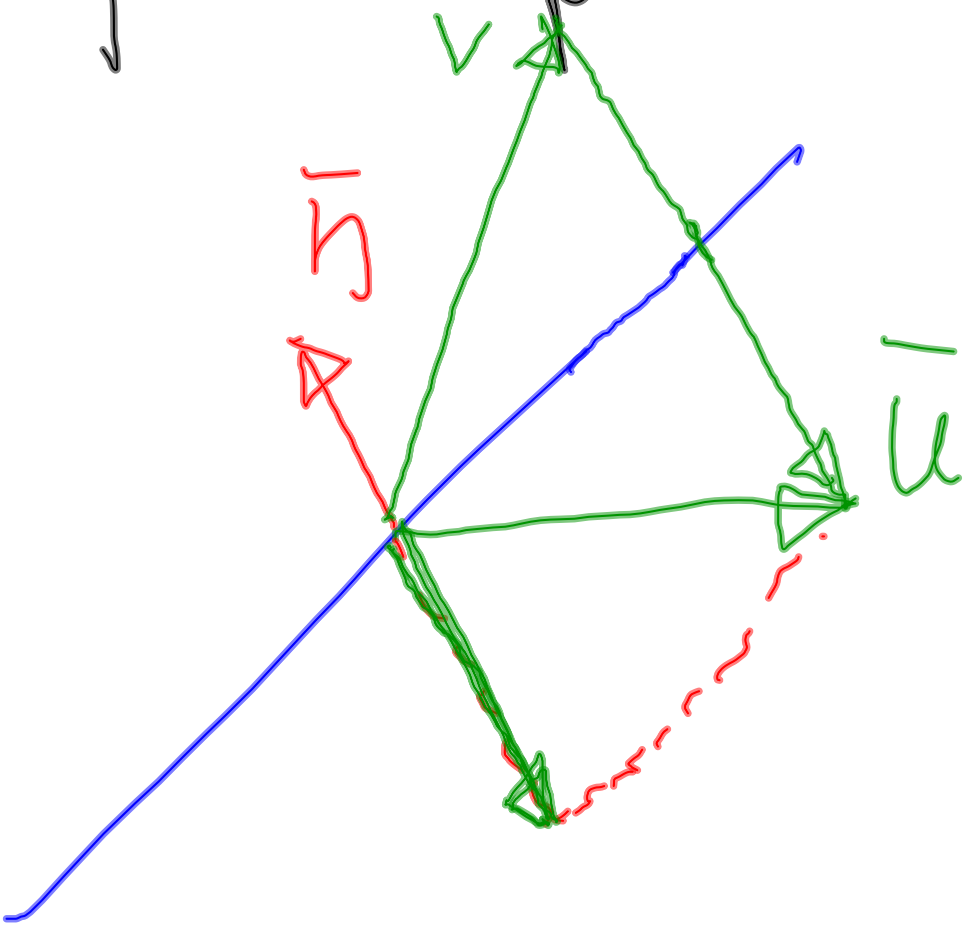
$|\bar{n}| = 1$

dec 7-14:20

Vi kan få

Spegling genom

projektion på normal



dec 7-14:21

$$\bar{v} = \bar{u} - 2\,\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\bar{u}$$

$$\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\bar{u} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n}$$

$$= (\bar{u}\cdot\bar{n})\bar{n}$$

eftersom $\bar{n}\cdot\bar{n} = 1$

dec 7-14:24

Hur skrivs

$\bar{u} \circ \bar{n}$ med

matrismultiplikation?

$$\bar{u} \longmapsto \bar{u} \circ \bar{n}$$

$$= \bar{n}^t \bar{u}$$

dec 7-14:26

$$\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\,\bar{u} = (\bar{u}\cdot\bar{n})\bar{n}$$

$$= \bar{n}\,\bar{n}^t\,\bar{u}$$

Alltså ges speglingen av

$$\bar{u} - 2\,\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\,\bar{u}$$

dec 7-14:28

$\bar{u} \longmapsto \bar{u}$

ges av identitets-
matrisen

och $-2\,\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\bar{u}$

ges av $-2 \cdot \bar{n}\bar{n}^t$

Alltså

dec 7-14:30

totalt sett

$$I - 2\bar{n}\bar{n}^t$$

dec 7-14:31

$\bar{n}$ $\qquad$ $\bar{n}^t$ $\qquad$ $\bar{u}$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

dec 7-14:32

$$\bar{n} \quad \bar{n}^t \quad \bar{u}$$

$$(*) =$$

dec 7-14:33

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

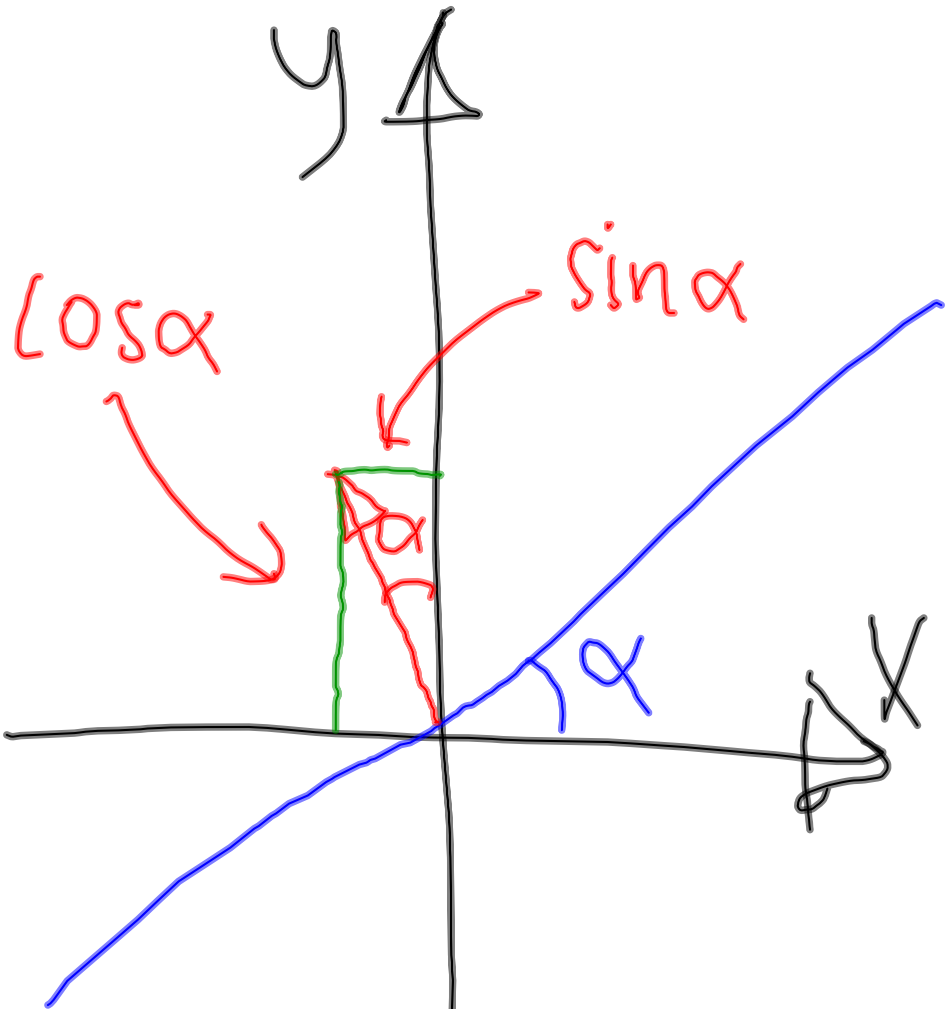
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

dec 7-14:33

$$(AB)C = A(BC)$$

Vinkeln mellan linjen och pos. x-axeln är α,

dec 7-14:35



$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

dec 7-14:36

Räkna ut

$$I - 2\bar{n}\,\bar{n}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

dec 7-14:38

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2\sin^2\alpha & +2\sin\alpha\cos\alpha \\ +2\sin\alpha\cos\alpha & 1-2\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & +\sin 2\alpha \\ +\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

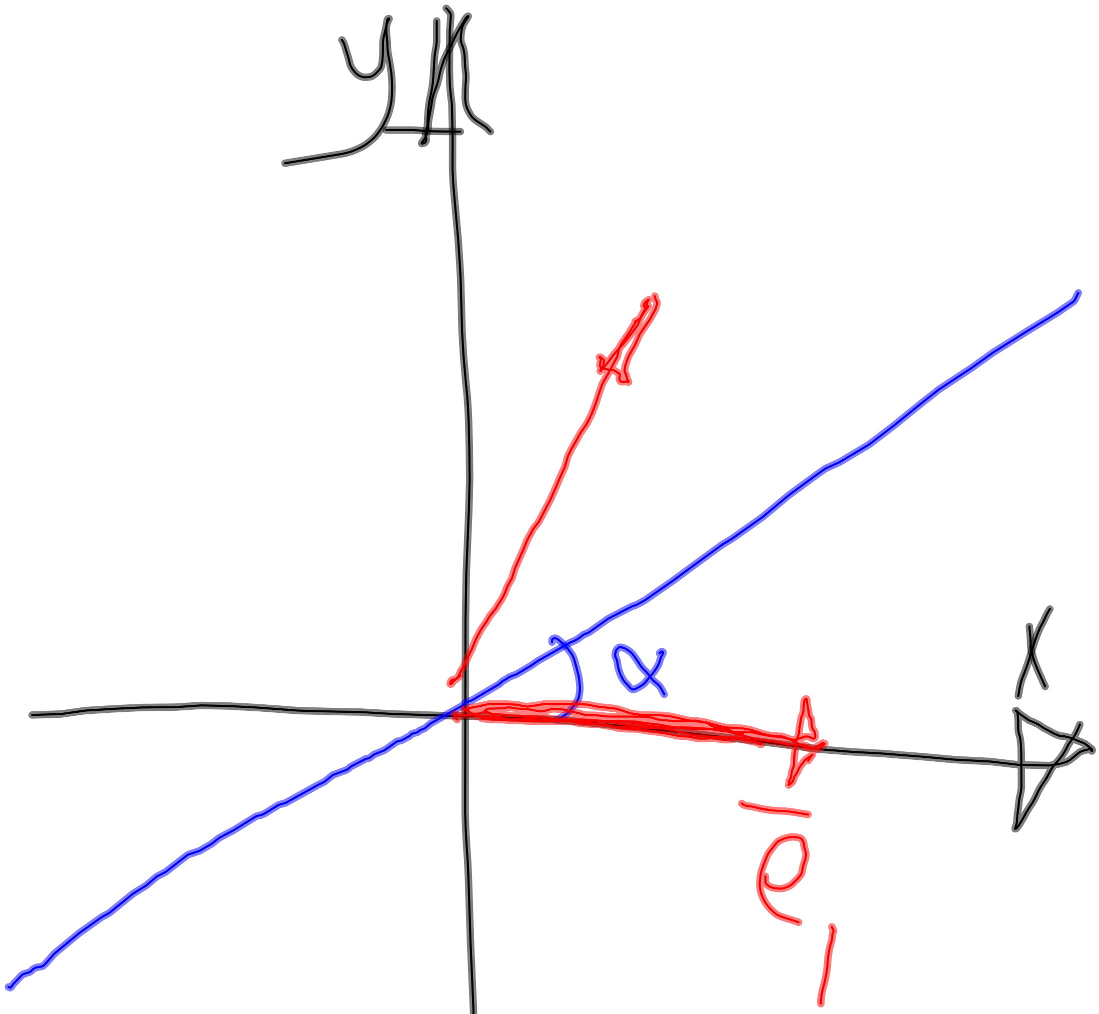
dec 7-14:39

Vi behövde sinus och cosinus för dubbla vinkeln.

dec 7-14:42

Vi har redan gjort detta genom att se var $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ går.

dec 7-14:43



$\bar{e}_1$ speglas till $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}$

dec 7-14:44